ODREĐENI INTEGRAL

Određeni integral u Rimanovom smislu se obeležava sa :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Ovo se čita:” integral od a do b ef od iks de iks”.

- a je donja granica integrala
- b je gornja granica integrala
- f(x) je podintegralna funkcija (integrand)
- x je integraciona promenljiva
- [a,b] je interval integracije

Ako je funkcija f(x) neprekidna na segmentu [a,b], tada ona ima primitivnu funkciju $\int f(x)dx = F(x) + c$ i važi jednakost :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ova jednakost se zove **Njutn- Lajbnicova formula** i daje vezu između određenog i neodređenog integrala.

Može se reći da je ovo osnovna formula integralnog računa.

<u>Osnovna svojstva određenog integrala</u>

1) Ako je f(x) integrabilna funkcija u intervalu [a,b] , onda je :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2) Ako su f(x) i g(x) integrabilne funkcije, onda je :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3) Ako integrabilne funkcije f(x) i g(x) zadovoljavaju u intervalu [a,b], gde je a<b, uslov $f(x) \le g(x)$,onda je:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

4) Ako je m donja a M gornja medja integrabilne funkcije f(x) u intervalu [a,b], gde je $a \leq b$, onda je:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5) Ako je funkcija neprekidna na intervalu [a,b], onda postoji tačka ξ iz intervala [a,b], tako da je :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi)$$

Ovo je teorema o srednjoj vrednosti odredjenog integrala!

6) Odredjeni integral menja znak kad mu se obrnu granice:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7) Ako je funkcija f(x) integrabilna u intervalu [a,b] i ako je a<c<b onda je :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ne mora svaka funkcija da bude integrabilna na odredjenom intervalu. Neki od glavnih kriterijuma su:

- Svaka ograničena funkcija f(x) u intervalu [a,b] sa konačnim brojem prekidnih tačaka između a i b je integrabilna u tom intervalu.

- Svaka monotona funkcija f(x) u intervalu [a,b] je integrabilna u tom intervalu.

- Svaka neprekidna funkcija u datom intervalu [a,b] je integrabilna u tom intervalu.

Smena promenljive u odredjenom integralu

Kao i kod neodredjenog i kod odredjenog integrala se može izvršiti smena integracione promenljive. To možemo uraditi na dva načina:

1. Prvo rešimo dati integral kao neodredjeni , vratimo smenu pa tu zamenimo gornju i donju granicu.

2. Izvršimo smenu direktno u datom integralu ali moramo menjati i granice integracije.

Neka je dat integral $\int_a^b f(x)dx$. Ovde naravno $x \in [a,b]$.

Uzmimo smenu $x = \varphi(t)$. Tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi`(t)dt \quad \text{ali su nove granice : } t \in [\alpha, \beta] \text{ gde je } \varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$$

Parcijalna integracija

Nju radimo kao kod neodredjenog integrala i granice ostaju iste!

Zapamtite: Neodređeni integral je funkcija, a određeni integral je broj!

Evo nekoliko laganijih primera:

1. Reši integral : $\int_1^3 x^3 dx$

Ovaj integral je tablični i njegovo rešenje je $\frac{x^4}{4}$, pa tu stavimo jednu uspravnu crtu i napišemo brojeve iz granica integrala: $\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3$. Sada x menjamo sa 3 pa od toga oduzmemo kad x zamenimo sa 1. To jest:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81-1}{4} = 20$$

---

2. Reši integral: $\int_0^2 \frac{dx}{x+2}$

Ovaj zadatak očigledno zahteva smenu. Rešićemo ga na dva načina, a Vi izaberite šta vam je lakše.

a. Skinućemo granice i rešiti ga kao neodređeni:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \text{vratimo smenu} = \ln|x+2|$$

Sada vratimo rešenje u određeni integral i granice se ne menjaju!

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^2 = \ln|2+2| - \ln|0+2| = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$$

b. Radićemo integral direktno , i u toku rada promeniti granice!

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right|, \text{ ali je sada,} \left| \begin{matrix} x+2=t \Rightarrow 2+2=t \Rightarrow t=4 \\ x+2=t \Rightarrow 0+2=t \Rightarrow t=2 \end{matrix} \right| \text{novi integral po t ima granice od 2 do 4}$$

$$=\int_2^4 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

---

3. Reši integral : $\int_1^e x^3 \ln x dx$

Ovaj integral ćemo rečiti parcijalnom integracijom a tu ne menjamo granice integracije , osim ako tokom rada ne koristimo smenu.

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u & x^3 dx = dv \\ \frac{1}{x} dx = du & \frac{x^4}{4} = v \end{vmatrix} = \ln x \frac{x^4}{4} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^4}{4} dx$$

$$= (\ln e \frac{e^4}{4} - \ln 1 \frac{1^4}{4}) - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^e$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} (\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

Домаћи задатак

Решити следеће интеграле

1. $\int_0^1 2x - 5\ d$
2. $\int_0^1 e^x\ d$
3. $\int_{-2}^2 (e^x - 1)^4 d$
4. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}\ d$

Тежи задаци

$$\int_0^1 2\,(x-1)\quad \cos x\ \ dx$$

$$\int_0^{\pi/2} 2\,x^2 \cos x\ \ dx$$

$$\int_0^1 e^x l\quad d$$

Пробајте решити неки од понуђених задатака
Сва питања , предлоге и наравно одрђени домаћи шаљите на већ понуђену адресу
djolemladenovic@gmail.com
такође можете ме контактирати и на Microsoft teams u што би билно и пожељније тамо ћу вам оставити и нека видео предавања о лекцијама које радимо.

Рок за слање домаћег је 12. Април.2020
Срећан рад.

Пр.4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

Пр.5) $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x^4}}$

Пр.3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = tgx|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$

$= (tgx + \cos x|)_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \left(tg\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$

Пр.4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

$$\begin{array}{lll} 11+5x=t & & \\ 5dx = dt & x=-2 & t = 11+5(-2) = 1 \\ dx = \dfrac{dt}{5} & x=-1 & t = 11+5(-1) = 6 \end{array}$$

$$= \int\limits_1^6 \frac{\frac{dt}{5}}{t^3} = \frac{1}{5}\int\limits_1^6 t^{-3}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^6 = \frac{-1}{10}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_1^6 = -\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{35}{36}\right) = \frac{7}{72}$$

Пр.5) $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x^4}}$

$$\begin{array}{lll} 3-x=t & x=2 & t=1 \\ -dx = dt & x=-13 & t=16 \\ dx = -dt & & \end{array}$$

$$= \int\limits_1^{16} \frac{-dt}{\sqrt[5]{t^4}} = -\int\limits_1^{16} t^{-\frac{4}{3}} dt = -\frac{t^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_1^{16} = -5\sqrt[5]{t}\Big|_1^{16} = -5\sqrt[5]{16} - \left(-5\sqrt[5]{1}\right) = -5\left(\sqrt[5]{16} - 1\right)$$

Пр.6) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} =$

$$\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}dx &= dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= e \\ x &= e^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= \ln e = 1 \\ t &= \ln e^2 = 2\ln e = 2 \end{aligned}$$

$= \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t} = \ln t|_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2$

Пр.7) $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4-4+4x-x^2}} = \int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9-(4+4x-x^2)}} =$

$= \int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9-(2-x)^2}} = \int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{(2-x)^2}{9}\right)}} = \int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{3\sqrt{\left(1-\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\right)}} =$

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{3} &= t \\ -\frac{1}{3}dx &= dt \\ dx &= -3dt \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ x &= 3,5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= 0 \\ t &= \frac{2-2,5}{3} = \frac{-1,5}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{3} \int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} \frac{-3dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t|_0^{-\frac{1}{2}} = -\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin 0 =$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) &= x \\ -\frac{1}{2} &= \sin x \\ x &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \arcsin(0) &= y \\ 0 &= \sin y \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$= \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6}$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geq \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{, if} \quad f_1(x) \geq f_2(x)$$